

基于CORDIC的精确快速幅相解算方法

孙悦, 王传伟, 康龙飞, 叶超, 张信

(中国工程物理研究院流体物理研究所, 四川绵阳 621999)

摘要: 针对传统CORDIC算法进行高精度幅度相位解算时迭代次数过多、时延较长、相位收敛较慢等局限,提出了一种基于最佳一致逼近方法的幅度与相位补偿算法,即利用传统CORDIC算法迭代一定次数后得到的向量信息,采用最佳一致逼近方法对幅度和相位分区间进行一阶多项式补偿,有效提高了计算精度.仿真及实测结果表明,对传统CORDIC算法4次迭代后的结果进行补偿,幅度相对误差可达到 10^{-5} 量级、相位绝对误差可达到 10^{-5} 度量级,最大输出时延不大于100ns.在使用部分专用乘法器的条件下,寄存器消耗降低了42.5%,查找表消耗降低了15.5%.采用该补偿算法,每多一次CORDIC迭代其相位精度可提高约一个数量级.因此,本文提出的补偿CORDIC算法在迭代次数、计算精度等方面优于传统CORDIC算法,适合于高精度计算的场合.

关键词: CORDIC; 相位补偿; 最佳一致逼近; FPGA

中图分类号: TN741 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2018)12-2978-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.12.022

High Precision & Speed Amplitude and Phase Solving Algorithm Based on CORDIC

SUN Yue, WANG Chuan-wei, KANG Long-fei, YE Chao, ZHANG Xin

(Institute of Fluid Physics, CAEP, Mianyang, Sichuan 621999, China)

Abstract: An amplitude and phase compensation algorithm based on the best uniform approximation method is proposed. It overcomes the limitations of the traditional CORDIC when used in high-precision calculation of the amplitude and phase, such as too many iterations, long delay time, and slow phase convergence. By utilizing the vector information obtained from several iterations of traditional CORDIC, sectionalized first-order polynomial of best uniform approximation compensating for the amplitude and phase results is constructed, thus efficiently improving the computation accuracy. Simulation and test results show that, by using the proposed algorithm with 4 iterations of traditional CORDIC, the relative error of amplitude can reach 10^{-5} level, and the absolute error of phase can reach 10^{-5} degree level. At the same time, the maximum delay time is no more than 100 ns. And with the use of some dedicated multipliers, the registers and LUTs are reduced by 42.5% and 15.5% respectively. Moreover, the phase precision can be increased approximately one order with one more iteration. Hence, compared to conventional CORDIC algorithm, the proposed algorithm improves in iterations and computation precision, and is suitable for high-precision computation applications.

Key words: coordinate rotation digital computer (CORDIC); phase compensation; best uniform approximation; FPGA

1 引言

坐标旋转数字计算机 (coordinate rotation digital computer, CORDIC) 可通过移位和加减等步骤计算平方根、正余弦、模、相位以及完成坐标变换,易于在FPGA等VLSI器件中实现,广泛应用于FFT、矩阵分解、数控振荡器和数字频率合成器等领域^[1-3].

针对CORDIC算法中由于迭代次数较多、输出延时大的问题,国内外很多学者进行了研究和改进.文献[4]提出的直接旋转CORDIC算法,将查找表法和传统CORDIC算法相结合:第一阶段通过查表将向量细化到更小区间;第二阶段直接用二进制角度值的补码按其位值进行 2^{-i} 角度的免缩放因子单向旋转.但随着精度要求的提高,查找表存储容量将快速增长,迭代次数也会大大

增加,硬件资源消耗巨大.文献[5]中的双步旋转 CORDIC 算法免去了缩放因子,算法的迭代次数有所减少,但在数据位宽较大时所需的迭代次数仍然较多,且其双步旋转的硬件结构仍然相对复杂,占用较多的硬件资源.文献[6]针对固定角度旋转 CORDIC 算法,将角度旋转分为单向固定角度旋转和一次角度估计旋转两部分,此混合算法减少了迭代次数,提高了数据吞吐率,但其精度受限,且应用范围亦有限.文献[7]基于表驱动法缩小目标旋转角度,通过改进的基本角度旋转方法旁路不必要的迭代.文献[8]将常规 CORDIC 算法和 scale-free 算法结合起来,提出一种增强的 scale-free 算法,该算法思路有一定的先进性.文献[9]提出一种表驱动的 2S-PCS 算法,其流水线较短且扩展因子可预先计算并编码.但是这些改进型 CORDIC 算法^[4-9]用于求解向量的幅度和相位时,相位收敛速度仍然比较慢.

本文在传统 CORDIC 算法的基础上提出了一种用于幅度和相位解算的改进算法.在传统 CORDIC 算法中,初始向量经过有限次迭代所得向量并不能与 X 轴完全重合,给幅度和相位的计算结果带来了一定的误差.本文利用旋转后得到的向量信息,采用最佳一致逼近一阶多项式对传统 CORDIC 算法幅度和相位的解算结果进行修正,从而提高幅度和相位的解算精度,提高相位的收敛速度.

2 基于传统 CORDIC 算法的幅度和相位解算

信号幅度及相位值的解算需通过开平方及反正切运算获得,而这两种运算在 FPGA 内部无法直接实现.CORDIC 算法是在硬件 FPGA 中求解该问题的通用方法,通过移位和加减等运算,即可完成矢量的旋转,从而获得其幅度及相位值^[10].

不考虑校模因子 K 时,基于 CORDIC 算法计算幅度及相位的迭代公式^[11]见式(1).

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n - 2^{-n} S_n Y_n \\ Y_{n+1} = Y_n + 2^{-n} S_n X_n \\ Z_{n+1} = Z_n - S_n \arctan(2^{-n}) \end{cases} \quad (1)$$

其中: $n = 0, 1, \dots, N-1$, N 为最大循环迭代次数; S_n 等于 1 或 -1, 表示矢量旋转角度的方向: -1 对应顺时针旋转; 1 对应逆时针旋转.

初始向量为 (X_0, Y_0) , 经过 N 次旋转之后, Y_N 接近于 0, 则旋转后的向量与目标向量 $(R, 0)$ 近似重合, 即有

$$\begin{cases} R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} \approx KX_N \\ \theta = \arctan(Y_0/X_0) \approx Z_N \end{cases} \quad (2)$$

式中: R 和 θ 分别是初始向量的幅度和相位.

在该算法中, 计算精度主要受迭代次数的影响. 当需要更高精度时, 需要更多的迭代次数, 从而计算时间

增长, 且硬件资源消耗增加.

3 基于改进 CORDIC 算法的幅度和相位解算

3.1 基于最佳一致逼近的幅度和相位一阶误差补偿算法

传统 CORDIC 算法要达到较高精度时, 所需迭代次数较多, 且相位的迭代收敛速度较幅度慢很多, 因此, 迭代一定次数后, 当向量的幅度精度满足要求时, 其相位的误差仍较大. 针对此问题, 本文提出一种新的补偿算法, 对经过传统 CORDIC 算法迭代后的向量幅度和相位, 采用最佳一致逼近^[12]方法分区间进行一阶多项式补偿, 使计算区间上幅度的相对误差最大值和相位的绝对误差最大值最小.

根据传统 CORDIC 算法的原理, 把初始相位角转换到 $[0, \pi/4]$ 范围内, 则可以跳过 $n=0$ 级的迭代. 设初始向量经过 CORDIC 算法 N 次迭代后, 此时向量的坐标为 (X_N, Y_N) , 则幅度可表示为 $R = K \sqrt{X_N^2 + Y_N^2} = KX_N \sqrt{1 + (Y_N/X_N)^2}$, 相位可表示为 $\theta = Z_N + \arctan(Y_N/X_N)$. 因此, 可定义幅度修正因子 $K_c = \sqrt{1 + (Y_N/X_N)^2}$, 剩余未旋转角度 $\Delta\theta = \arctan(Y_N/X_N)$. 由于剩余未旋转角度可表示为 $\Delta\theta = \sum_{n=N+1}^{\infty} [-S_n \cdot \arctan(2^{-n})]$, 易知其最大值为:

$$|\Delta\theta|_{\max} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \arctan(2^{-n}) \quad (3)$$

由此得到 $|Y_N/X_N|$ 的最大值为:

$$|Y_N/X_N|_{\max} = \tan(|\Delta\theta|_{\max}) \quad (4)$$

虽然幅度修正因子和剩余未旋转角度函数分别包含了开平方和反正切运算, 但自变量 Y_N/X_N 的取值区间已大大减小, 因此可用易于 FPGA 实现的简单函数对其进行逼近. 本文采用最佳一致逼近算法对两种运算进行一阶多项式拟合, 以便利用 FPGA 实现. 为了进一步提高求解精度, 分区间进行拟合计算.

(1) 幅度误差补偿

令 $x_m = \tan(|\Delta\theta|_{\max})$, 则 $Y_N/X_N \in [-x_m, x_m]$. 当 $n \geq 4$ 时, 近似有 $\arctan 2^{-n} \approx 2^{-n}$ 及 $\tan 2^{-n} \approx 2^{-n}$. 由式(3)与式(4)可知,

$$x_m \approx \tan\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} 2^{-i}\right) = \tan(2^{-N}) \approx 2^{-N} \quad (5)$$

将 $[0, x_m]$ 区间等分为 m_1 个子区间, 并设每一个小区间为 $[x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1, 2, \dots, m_1)$. 因此, 每个小区间端点 $x_i = i \cdot 2^{-N}/m_1$, $(i = 0, 1, \dots, m_1)$. 设幅度修正因子函数 K_c 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1, 2, \dots, m_1)$ 上的最佳一致逼近一阶多项式为

$$K_c = k_{rmi} \cdot (Y_N/X_N) + k_{rbi} \quad (6)$$

由最佳一致逼近理论可知, 该函数具有三个偏差点, 即区间的两端点 x_{i-1} 与 x_i 及区间内某一点. 令 x_{mi} 为

区间 $[x_{ri-1}, x_{ri}]$ 内幅度相对误差绝对值最大的一点,易知此点误差函数的一阶导数为0. 其中 ε_{ri} 为每个区间上幅度相对误差最大值. 基于最佳一致逼近理论并结合平方根函数的性质,得出4个方程:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_{ri-1}^2} - (k_{rai} \cdot x_{ri-1} + k_{rbi}) = \varepsilon_{ri} \cdot \sqrt{1+x_{ri-1}^2} \\ \sqrt{1+x_{ri}^2} - (k_{rai} \cdot x_{ri} + k_{rbi}) = \varepsilon_{ri} \cdot \sqrt{1+x_{ri}^2} \\ \sqrt{1+x_{zri}^2} - (k_{rai} \cdot x_{zri} + k_{rbi}) = -\varepsilon_{ri} \cdot \sqrt{1+x_{zri}^2} \\ k_{rbi}x_{zri} - k_{rai} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

确定迭代次数 N 与分段数 m_1 ,即可求解出系数 k_{rai} 与 k_{rbi} 及控制误差 ε_{ri} . 由于 K_c 为偶函数,结合偶函数的性质,可得在整个区间上采用一阶拟合多项式补偿后的向量幅度表达式为:

$$\begin{aligned} R &= K \cdot X_N \cdot K_c = K(k_{rai} \cdot |Y_N| + k_{rbi} \cdot X_N) \\ &= k_{krai} \cdot |Y_N| + k_{krbi} \cdot X_N \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $k_{krai} = K \cdot k_{rai}$, $k_{krbi} = K \cdot k_{rbi}$.

其中系数 k_{krai} 和 k_{krbi} 的求解也可根据经济化的逼近多项式算法^[13],通过Tchebyshev多项式直接得到.

从式(8)中可以看出,幅度计算无需用到除法 Y_N/X_N 的结果,但一阶多项式的系数 k_{rai} 与 k_{rbi} 的取值与值 Y_N/X_N 的区间有关,将 x_m 近似处理后, Y_N/X_N 取值区间的判断通过移位和比较运算即可完成,有利于FPGA实现.

(2) 相位误差补偿

先只考虑 Y_N 为正的情况,将 $[0, x_m]$ 区间分成 m_2 个子区间,并设每一个子区间为 $[x_{i-1}, x_i]$, ($i=1, 2, \dots, m_2$). 为保证整个区间上的相位绝对误差最大值最小,则应保证每个小区间最大误差最小且相同.

设在区间 $[x_{i-1}, x_i]$, ($i=1, 2, \dots, m_2$)内,剩余未旋转角度 $\Delta\theta$ 采用最佳一致逼近算法得到的一阶拟合多项式为:

$$\Delta\theta = k_{ai} \cdot (Y_N/X_N) + k_{bi} \quad (9)$$

令 x_{zi} 为 $[x_{i-1}, x_i]$ 区间内绝对误差最大的一点,易知此点处误差函数的一阶导数为0. 设 ε_s 为相位相对误差的最大值,基于最佳一致逼近理论,并结合反正切函数的性质,则在端点 x_{i-1} 与 x_i 处误差也为最大值 ε_s ,由此可得出式(10):

$$\begin{cases} \arctan(x_{i-1}) - (k_{ai} \cdot x_{i-1} + k_{bi}) = -\varepsilon_s \\ \arctan(x_i) - (k_{ai} \cdot x_i + k_{bi}) = -\varepsilon_s \\ \arctan(x_{zi}) - (k_{ai} \cdot x_{zi} + k_{bi}) = \varepsilon_s \\ 1/(1+x_{zi}^2) - k_{ai} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

确定迭代次数 N 与分段数 m_2 ,即可求解出系数 k_{ai} 与 k_{bi} 及控制误差 ε_s ;确定迭代次数 N 与控制误差 ε_s ,亦可求解出分段数 m_2 及系数 k_{ai} 与 k_{bi} . 由于 $\Delta\theta$ 为 Y_N/X_N 的奇函数,结合奇函数的对称性,即可得到在整个区间

上采取误差补偿后的向量相位公式为:

$$\theta = Z_N + \Delta\theta = \begin{cases} Z_N + [k_{ai}(Y_N/X_N) + k_{bi}], Y_N \geq 0 \\ Z_N + [k_{ai}(Y_N/X_N) - k_{bi}], Y_N < 0 \end{cases} \quad (11)$$

但是此时引入了除法运算 Y_N/X_N ,需对其进行优化. 本文采用并行牛顿迭代法(Anderson - Earle - Goldschmidt - Powers Algorithm)计算除法,即分子和分母都乘以因子 f_j ,迭代足够次数后,分母 t_j 近似为1,此时的分子 q_j 即为除法的结果. 其迭代公式如下:

$$\begin{cases} f_j = 2 - t_j \\ q_{j+1} = q_j \cdot f_j \\ t_{j+1} = t_j \cdot f_j \end{cases} \quad (12)$$

易知 X_N 非负,当 X_N 用浮点数表示时,有 $X_N = 2^l(1+d)$,其中 l 为指数, $d \in [0, 1)$,则可以得到:

$$\begin{aligned} Y_N/X_N &= Y_N/[2^l(1+d)] \\ &= (Y_N/2^l)[1/(1+d)], d \in [0, 1) \end{aligned} \quad (13)$$

由式(13),可将问题转化为求解 $1/(1+d)$.

由于初始值的选择对牛顿迭代法的收敛速度及精度有很大影响,因此,为了提高除法计算精度和收敛速度,将变量 d 的区间 $[0, 1)$ 分成4个子区间,设每一个子区间为 $[d_{i-1}, d_i]$, ($i=1, 2, \dots, 4$),在每一个子区间上选取合适的初始值表达式. 文中 q 的初始值 q_0 取一阶多项式 $a_i \cdot d + b_i$,该多项式为区间 $[d_{i-1} - biasm_i, d_i + biasn_i]$, ($biasm_i > 0, biasn_i > 0$)上对函数 $1/(1+d)$ 采用最小二乘法拟合所得,从而可得 t 的初始值 t_0 为 $(a_i \cdot d + b_i)(1+d)$, f 的初始值 f_0 为 $2 - t_0$. 为保证整个区间上最大误差最小,尽可能使每个子区间的最大迭代误差最小且相等. 根据该原则,变量 d_i , $biasm_i$, $biasn_i$ 的值通过参数扫描法获得,从而进一步获得多项式系数 a_i , b_i . 迭代2次后,所求得各个子区间端点及一阶多项式系数如表1所示. 在MATLAB中对函数 $1/(1+d)$ 求解误差进行了仿真,如图1所示,其中纵坐标 err 表示原函数与迭代值的差值. 因此,除法 Y_N/X_N 近似计算共包

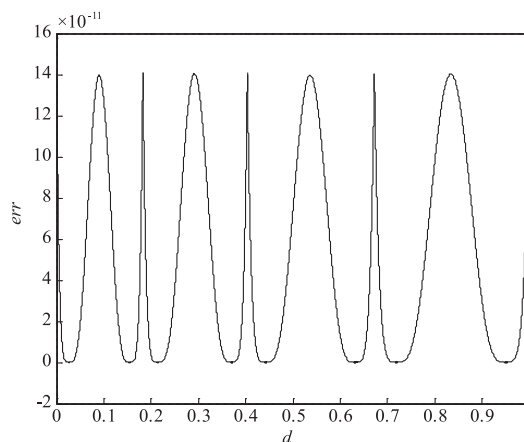


图1 函数的2次并行牛顿迭代近似误差

含 6 个乘法、4 个加法和 1 个移位运算。

表 1 函数 $1/(1+d)$ 的分段子区间右端点及其一阶拟合系数

区间右端点 d_i	0.1826	0.4037	0.6722	1
(a_i, b_i)	(-0.84336516013, 0.99655642518)	(-0.60074694353, 0.95225303133)	(-0.42481146554, 0.88123202223)	(-0.29811510973, 0.79606807464)

3.2 算法仿真与分析

采用上述算法,分段数为 4、迭代次数分别为 4 和 5 时,相位与幅度对应的一阶逼近多项式系数如表 2 所示.当数据的小数位宽为 28 位时,开平方运算的一阶多项式逼近相对误差最大值分别为 $1.5256461172e-05$ 和 $3.8145517530e-06$,反正切运算的一阶多项式逼近绝对误差最大值分别为 $8.8005787267e-07$ 弧度和 $1.1000574900e-07$ 弧度,其拟合误差分布曲线如图 2 所示.基于开平方运算和反正切运算的一阶最佳一致逼近多项式拟合,幅值为 1、相位角在 $[0, \pi/4]$ 内的 10000 个随机样本输入向量的幅度相位解算误差如图 3

所示,幅度相对误差最大值分别为 $1.5256460906e-05$ 和 $3.8145517527e-06$,其计算误差由开平方函数的一阶逼近引入,与单个开平方函数的计算误差一致,数据位宽引入的舍入误差可忽略.相位的绝对误差最大值分别为 $5.0496106554e-05$ 度和 $3.8145470018e-06$ 度(也即 $8.8132331881e-07$ 弧度和 $1.1189956877e-07$ 弧度),其计算误差由反正切运算的一阶逼近误差和除法的近似计算误差引入.由于除法近似计算精度高(除法近似计算的最大误差为 $1.4086654065e-10$),因此相位计算的误差主要来自于反正切运算的逼近误差,和单个反正切的运算误差相接近.

表 2 区间分 4 段时幅度与相位一阶逼近多项式系数

迭代次数	i	端点 x_i	k_{ai}	k_{bi}	端点 x_{ri}	k_{rai}	k_{rbi}
$N=4$	1	0.02394260	0.9998089831	$8.80058e-7$	0.015625	0.0078206323	0.9999847094
	2	0.03891340	0.9989946899	$2.03761e-5$	0.03125	0.0234561597	0.9997401463
	3	0.05142086	0.9979512069	$6.09818e-5$	0.046875	0.0390744962	0.9992515577
	4	0.06256984	0.9967518840	$1.22652e-4$	0.0625	0.0546642512	0.9985200160
$N=5$	1	0.01196987	0.9999522448	$1.10006e-7$	0.0078125	0.0039072657	0.9999961833
	2	0.01945000	0.9997485961	$2.54765e-6$	0.015625	0.0117210813	0.9999351218
	3	0.02569600	0.9994874720	$7.62663e-6$	0.0234375	0.0195327505	0.9998130322
	4	0.03125870	0.9991871330	$1.53441e-5$	0.03125	0.0273408442	0.9996299818

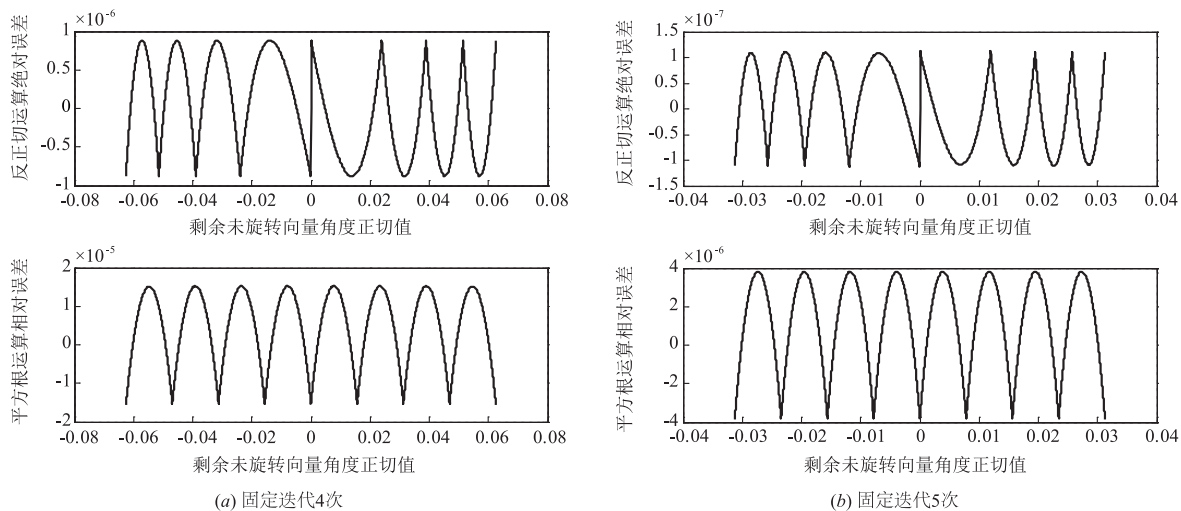


图 2 区间分段 4 段,平方根与反正切运算的一阶多项式拟合误差

为了解 CORDIC 算法迭代次数 N 与分段数对幅值和相位求解精度的影响,利用 MATLAB 进行了仿真.固定迭代次数 $N=4$,向量的幅度与相位最大误差随分段

数变化的关系如图 4(a) 所示.固定分段数 $m_1 = m_2 = 4$,向量的幅度与相位最大误差随迭代次数 N 变化的关系如图 4(b) 所示.可见,随着迭代次数与分段数的增加,

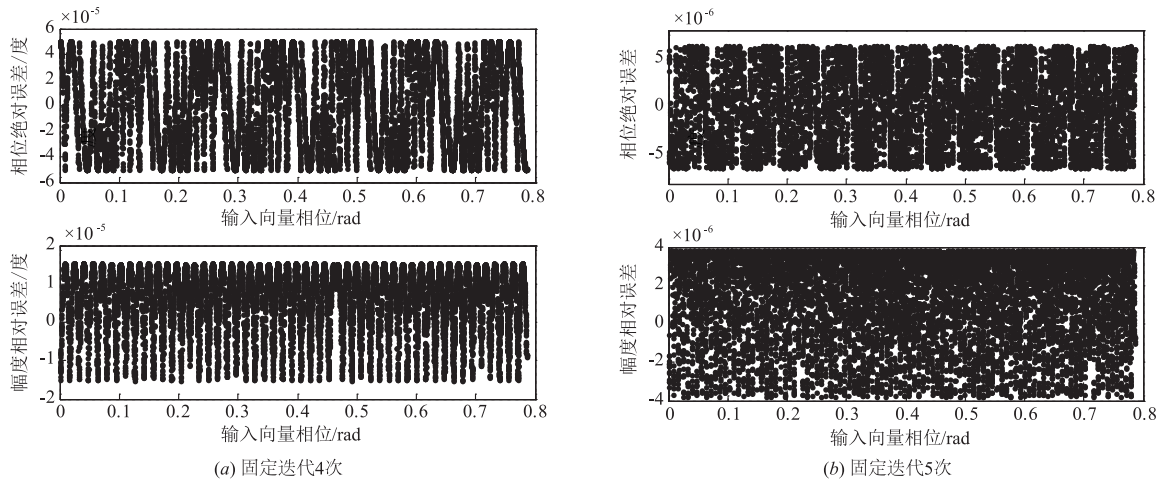


图3 区间分段4段, 基于最佳一致逼近原理的幅度与相位求解误差

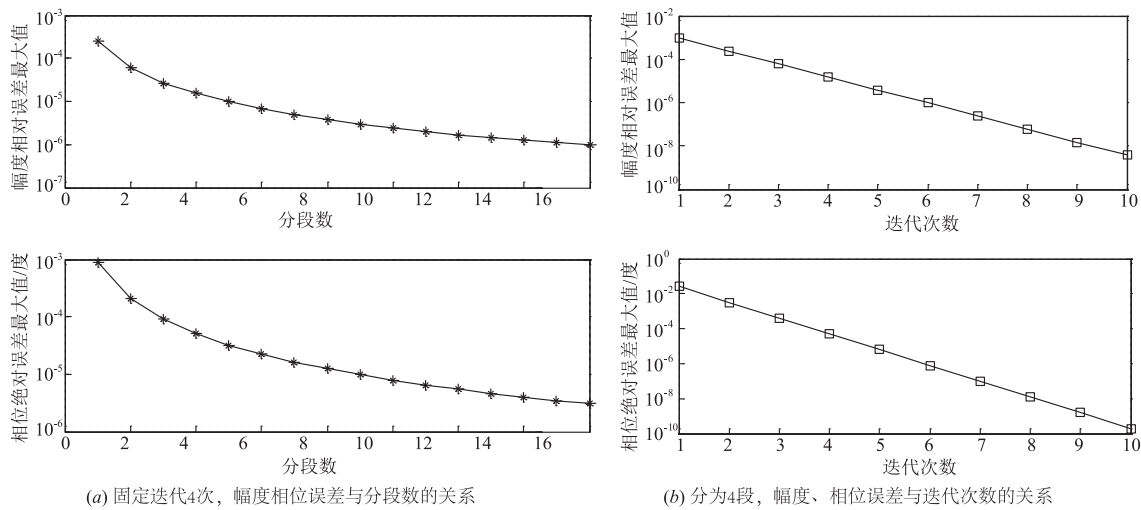


图4 改进算法的迭代次数与区间分段数对幅度与相位误差的影响

算法的误差逐渐减小。

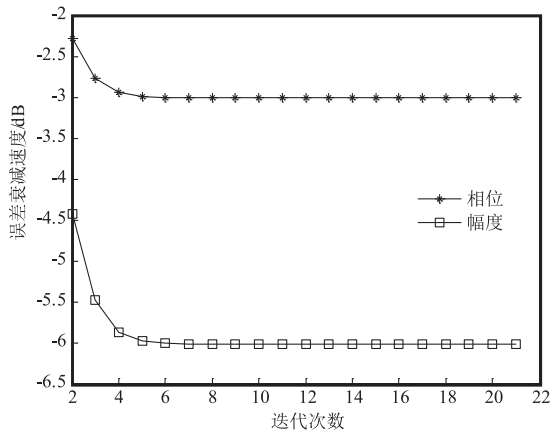
设 $Err_Rm_n, Err_θm_n$ 分别为第 n 级迭代后所对应的幅度相对误差和相位绝对误差最大值。为衡量算法的收敛速度, 采用 $10\log(Err_Rm_n/Err_Rm_{n-1})$ 与 $10\log(Err_θm_n/Err_θm_{n-1})$ 表示第 n 级迭代后幅度和相位误差衰减速度, 其单位定义为 dB。改进前后的算法误差衰减速度对比如图 5 所示。由图 5(a) 可见, 传统 CORDIC 算法每增加一次迭代, 幅度下降约 6dB, 相位下降约 3dB。采用改进算法后, 固定分段数 $m_1 = m_2 = 4$, CORDIC 算法每增加一次迭代, 幅度下降约 6dB, 相位下降约 9dB, 如图 5(b) 所示。由此可见, 改进后 CORDIC 算法的相位收敛速度加快, 在需要高精度的应用中优势明显。

4 定点数下的 FPGA 实现

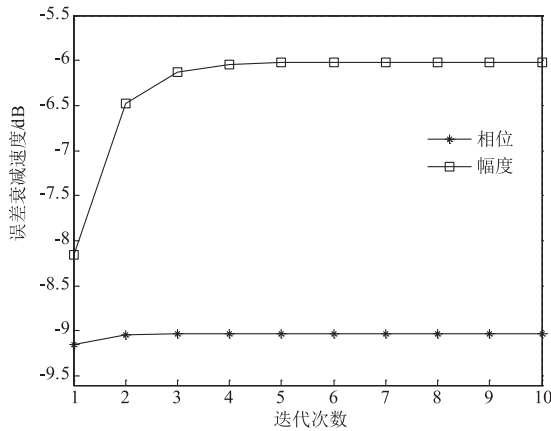
本研究采用 Verilog HDL 进行程序设计, 整体程序分为 4 个模块, 即角度预处理、传统 CORDIC 算法迭代、基于最佳一致逼近的幅值相位一阶线性补偿和结果映

射。结构框图如图 6 所示。根据 MATLAB 仿真的结果, 选取 $N=4$, 分段数为 4, 在 XILINX 公司的 XC6VLX240T 型号 FPGA 上对以上算法进行实现。

将 $[0, 2\pi]$ 等分为 8 个区间, 按照映射函数^[4]将 $[0, \pi/4]$ 范围外的向量折叠映射到 $[0, \pi/4]$ 范围内, 并得到输入向量所在范围标志, 后级单元根据此标志还原出输入向量角度。使用 MATLAB 的 fi 函数为迭代计算时的数据构造定点对象, 基于定点仿真结果, 最终选择小数位宽为 28 位。算法输入采用的是 29 位数据, 包括 1 位符号位, 28 位小数位; 输出幅度采用 1 位符号位, 1 位整数位, 28 位小数位; 输出相位采用弧度制表示, 包括 1 位符号位, 3 位整数位和 28 位小数位。在 ISE14.5 软件环境下对改进 CORDIC 算法采用流水线结构实现, 用其自带工具 XST 进行综合、布局布线后, 得到硬件消耗量、电路最高时钟频率和最大时延等数据, 并与传统 CORDIC 算法进行了对比, 综合结果如表 3 所示。将 $[0, 2\pi]$ 范围内 4000 个等相位间隔样本输入向量的幅度相



(a) 传统CORDIC算法



(b) 改进CORDIC算法

图5 改进CORDIC算法及传统CORDIC算法误差衰减速度对比

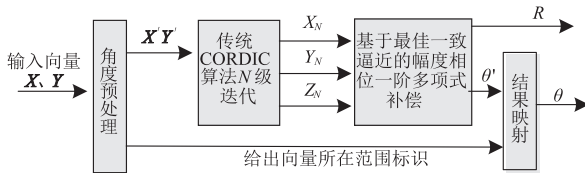


图6 程序整体结构框图

位解算结果通过串口读出,在 MATLAB 中进行计算分析,如图 7 所示.可以看出,4 次传统 CORDIC 迭代后,改进算法的幅度相对误差最大值为 1.53×10^{-5} ,相位

表 3 算法主要性能指标对比

资源名称	改进 CORDIC 算法	传统 CORDIC 算法
Slice Registers	1171	2035
Slice LUTs	1674	1981
Slice Flip Flops	1911	2053
DSP48E1s	42	2
CORDIC 迭代次数	4	21
最大输出时延	100ns	220ns
最高运行频率	100.8 MHz	108.6 MHz

绝对误差最大值为 5.1×10^{-5} 度. 要达到同样的相位精度,传统 CORDIC 算法至少需要 21 级迭代.

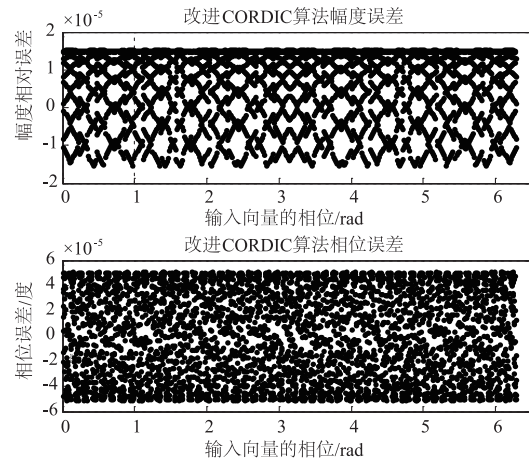


图7 改进CORDIC算法FPGA实现结果

传统 CORDIC 算法的模校正引入了 1 个乘法,而改进 CORDIC 算法共需要 9 个乘法,但是改进后其迭代次数大大减少,相位的收敛速度得到有效提高.改进算法每增加一次传统 CORDIC 算法迭代,输出的相位误差近似减小一个数量级.在同等精度的条件下,输出延迟不大于 100ns.由于本文多引入了 8 个乘法运算,相比于专用乘法器,如果乘法使用通用 FPGA 逻辑资源 (slices) 实现,将会消耗更多的 FPGA 资源.考虑到 FPGA 自带的 DSP48E1 资源集成度高、应用效率高以及能提升最大工作频率等优势,本文采用 DSP48E1 实现乘法运算.相对传统 CORDIC 算法,改进 CORDIC 算法多消耗了 40 个 DSP48E1 专用乘法器,但是寄存器消耗降低了 42.5%,查找表开销降低了 15.5%.需要说明的是,由于 DSP48E1 乘法器输入是 18×25 位的,一个实数乘法用 18×25 的位宽,可以保证最大化利用乘法器.在精度满足需求的情况下,通过降低乘法输入的位宽可有效减少乘法器的使用量.

5 结论

本研究针对传统 CORDIC 算法迭代次数过多、时延较长、向量相位收敛较慢等局限,提出了基于最佳一致逼近的幅度与相位一阶多项式补偿算法.对传统 CORDIC 算法 4 次迭代后的结果进行补偿修正后,幅度相对误差达到 10^{-5} 量级、相位绝对误差达到 10^{-5} 度量级,有效提高了向量的幅度和相位求解精度.其最大输出时延不大于 100ns.在资源使用方面,虽然多引入的 8 个乘法相对传统 CORDIC 算法多消耗了 40 个 DSP48E1 乘法器,但是寄存器使用量降低了 42.5%,查找表使用量降低了 15.5%.且改进后的算法,每增加一次传统 CORDIC 迭代,其相位计算精度可提高约一个数量级,

相位收敛速度大大加快. 算法仿真和 FPGA 实际测试结果表明, 改进后的 CORDIC 算法适用于高速高精度场合.

参考文献

- [1] Valls J, Kuhlmann M, Parhi K K. Evaluation of CORDIC algorithms for FPGA design [J]. Journal of VLSI Signal Processing Systems for Signal Image & Video Technology, 2002, 32(3): 207 - 222.
- [2] Aggarwal S, Meher P K, Khara K. Concept design and implementation of reconfigurable CORDIC [J]. IEEE Transactions on Very Large Scale Integration Systems, 2015, 24(4): 1588 - 1592.
- [3] Prasad N, Tripathy M R, Das A D, et al. Efficient VLSI implementation of CORDIC based direct digital synthesizer [J]. Advances in Intelligent Systems and Computing, 2015, 308(1): 597 - 603.
- [4] 姚亚峰, 冯中秀. 直接旋转 CORDIC 算法及其高效实现 [J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2016, 44(10): 113 - 118.
YAO Ya-feng, FENG Zhong-xiu. Direct rotation CORDIC algorithm and its effective implementation [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2016, 44(10): 113 - 118. (in Chinese)
- [5] 徐成, 秦云川. 免缩放因子双步旋转 CORDIC 算法 [J]. 电子学报, 2014, 42(7): 1441 - 1445.
XU Cheng, QIU Yun-chuan. Double-step scaling free CORDIC [J]. Acta Electronic Sinica, 2014, 42(7): 1441 - 1445. (in Chinese)
- [6] 张朝柱. 高速高精度固定角度旋转 CORDIC 算法的设计与实现 [J]. 电子学报, 2016, 44(2): 485 - 490.
ZHANG Chao-zhu. Design and implementation of CORDIC algorithm for high speed and precision fixed angle of rotation [J]. Acta Electronic Sinica, 2016, 44(2): 485 - 490. (in Chinese)
- [7] 史方显. 改进型高速高精度 CORDIC 算法及其在 DDFS 中的应用 [J]. 电子学报, 2017, 45(2): 446 - 450.
SHI Fang-xian. Directdigital frequency synthesizer based on an improved high speed & high precision CORDIC algorithm [J]. Acta Electronic Sinica, 2017, 45(2): 446 - 450. (in Chinese)
- [8] Jaime F J, Nchez M A, Hormigo J, et al. Enhanced scaling-free CORDIC [J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems I Regular Papers, 2010, 57(7): 1654 - 1662.
- [9] 牟胜梅, 杨晓东. 扩展因子预编码的两阶段 CORDIC 旋转算法 2S-PCS [J]. 计算机学报, 2011, 34(4): 729 - 737.
MOU Sheng-mei, YANG Xiao-dong. A two-step CORDIC rotation algorithm with pre-coded scale factors [J]. Chinese Journal of Computers, 2011, 34(4): 729 - 737. (in Chinese)
- [10] 张晓帆, 李广军. 基于低硬件复杂度、高速 CORDIC 的 SVD 模块设计与实现 [J]. 电子学报, 2015, 43(4): 738 - 742.
ZHANG Xiao-fan, LI Guang-jun. The design and implementation of SVD module with reduced hardware complexity and high-speed CORDIC processor [J]. Acta Electronic Sinica, 2015, 43(4): 738 - 742. (in Chinese)
- [11] Volder J E. The CORDIC Trigonometric computing technique [J]. Electronic Computers Ire Transactions on, 1959, EC-8(3): 330 - 334.
- [12] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析(第 4 版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001. 76 - 83.
- [13] 王仁宏. 数值逼近 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1999. 28 - 30.

作者简介



孙悦女, 1991 年出生于安徽阜阳. 硕士, 研究实习员, 主要研究方向为嵌入式测控技术、数据采集处理技术.

E-mail: 15151823877@163.com



王传伟(通信作者) 男, 1983 年出生于云南宣威. 博士研究生, 副研究员, 主要研究方向为测控技术和固态脉冲功率技术.

E-mail: 250705799@qq.com